О п р е д е л е н и е. Фокусом [1] m-параболоида Q_m многообразия M_m называется точка $X(x^\alpha, x^u) \in Q_m$, в которой пересекаются все инфинитезимально близкие параболоиды многообразия M_m.

Система алгебраических уравнений для нахождения фокусов имеет вид: $\mathcal{F}^u = a^u_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta - 2x^u = 0$, (а)

$$\mathcal{F}^u_\gamma = [c^u_{\alpha\beta,\gamma} x^\beta - 2a^u_{\alpha\beta} c^\beta_{v\gamma} x^v - 2(a^u_{\alpha\gamma} - c^u_{\alpha\gamma})] x^\alpha = 0. \quad (б) \qquad (4)$$

Отсюда следует

П р е д л о ж е н и е. Многообразие $\widetilde{M}_m$ является фокальным для Q_m-многообразия, т.е. образовано фокусами параболоидов, принадлежащих $\widetilde{M}_m$.

Действительно, для каждого параболоида $Q_m \subset M_m$ его отмеченная точка $A \in \widetilde{M}_m$, являясь началом соответствующего семейства реперов $\widetilde{R} = \{A, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_u\}$, имеет всегда нулевые относительные координаты $x^\alpha = x^u = 0$, которые удовлетворяют системе (4).

О п р е д е л е н и е. Точка $X(x^\alpha, x^u)$ называется характеристической [1] для параболоида $Q_m \in M_m$, если x^α, x^u удовлетворяют системе алгебраических уравнений (4, б).

Если характеристическая точка $X \in Q_m$, то она является и фокальной. Первый фундаментальный объект Q_m-многообразия M_m $\Gamma_1 = \{a^u_{\alpha\beta}, c^u_{\alpha\beta}, c^\beta_{u\alpha}, c^u_{\alpha\beta,\gamma}\}$ является основным [2]. Отметим, что каждая из групп компонент $(c^u_{\alpha\beta})$, $(c^\beta_{u\alpha})$, $(c^u_{\alpha\beta\gamma})$ образует самостоятельный тензор смешанного типа, первый из которых $(c^u_{\alpha\beta})$ является основным тензором фокальной m-поверхности $\widetilde{M}_m$, оснащенной трансверсальным расслоением $\overset{t}{M}_m \subset S^1_{n-m}$ с фундаментальным объектом $c^\beta_{u\alpha}$; $c^u_{\alpha\beta\gamma}$ является первым продолжением тензора $a^u_{\alpha\beta}$.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1977. Вып. 7. С. 39-42.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 17 1986

УДК 514.75

О НЕГОЛОНОМНЫХ КОМПОЗИЦИЯХ А.П.НОРДЕНА ОСНАЩАЮЩИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Ю.И. П о п о в

Данная статья является продолжением работ [2]-[6] автора, в которых рассматривается построение общей теории регулярных $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределений. В различных дифференциальных окрестностях найдены пучки неголономных композиций А.П.Нордена (НКН) [1], ассоциированные с оснащающим M-распределением и оснащающим H-распределением [2] данного $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения. Во всей работе мы придерживаемся обозначений работ [2]-[6] и следующей схемы использования индексов: $\alpha, \beta, \gamma = m+1, n-1$; $\sigma, \tau, \rho = 1, n-1$; $i, j, k, s = r+1; m$; $a, b, c = 1, m$; $u, v, w = r+1, n-1$; $p, q, t = 1, r$; $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = 1, n$.

1. Неголономные композиции А.П.Нордена в оснащающем H-распределении

а) Базисное Λ-распределение и распределение $H\Lambda$-виртуальных нормалей $\chi(L_0)$ [2; §4] первого рода Λ-распределения определяют НКН (χ, Λ) [1], структурный объект (аффинор) $\{f^\tau_\sigma\}$ которой в репере $\mathcal{R}_1(H, \chi)$ [2] можно задать формулами

$$f^\tau_\sigma \overset{def}{=} \delta^\tau_\sigma - 2H^\tau_p \overset{*}{H}{}^p_\sigma = -\delta^\tau_\sigma + 2H^\tau_u \overset{*}{H}{}^u_\sigma, \qquad (1)$$

где

$$\|H^\tau_\sigma\| = \begin{Vmatrix} \delta^\rho_q & \Lambda^v_q \\ 0 & \delta^v_u \end{Vmatrix}; \quad \|\overset{*}{H}{}^\tau_\sigma\| = \begin{Vmatrix} \delta^s_p & -\Lambda^w_p \\ 0 & \delta^w_v \end{Vmatrix}. \qquad (2)$$

Формулы охвата компонент аффинора $\{f^\tau_\sigma\}$ в репере $\mathcal{R}_1(H, \chi)$ принимают вид:

$$f^q_p = -\delta^q_p; \quad f^u_p = -2\Lambda^u_p; \quad f^q_u = 0; \quad f^v_u = \delta^v_u. \qquad (3)$$

Инвариантная НКН оснащающего H-распределения, заданная полем аффинора $\{f^\sigma_\tau\}$ (3), внутренним образом присоединяется в дифференциальной окрестности первого порядка и геометрически характеризуется тем, что ассоциированное $H(\Lambda)$-распределение является взаимным $(\Lambda^n_{pu}\equiv 0)$ [7, §1]; [3, §1].

Рассмотрим пучок $(\chi,\check{B})$ [4, §2] $H\Lambda$-виртуальных нормалей первого рода Λ-распределения. Пучок этих нормалей определим пучком квазитензоров

$$\chi^p_u(\varepsilon)=\chi^p_u+\varepsilon\overset{*}{\check{S}}{}^p_u, \qquad (4)$$

где ε -абсолютный инвариант, а величины $\overset{*}{\check{S}}{}^p_u$ образуют тензор

$$\overset{*}{\check{S}}{}^p_u=\chi^p_u-\check{B}^p_u\ ;\ \nabla\overset{*}{\check{S}}{}^p_u=\overset{*}{\check{S}}{}^p_{u\varkappa}\,\omega^{\varkappa}_{0}. \qquad (5)$$

При $n-\tau-1<\tau$ тензор $\{\overset{*}{\check{S}}{}^p_u\}$ задает в Λ-плоскости $(n-\tau-1)$-мерную плоскость ($\overset{*}{\check{S}}$ -плоскость), проходящую через точку L_0. Условно можно считать, что $\overset{*}{\check{S}}$ -плоскость принадлежит семейству $(\chi,\check{B})$ плоскостей и ей соответствует значение $\varepsilon=\infty$ (при $n-\tau-1<\tau$). В частности, при $\varepsilon=0$ из пучка $(\chi,\check{B})$ высекается χ -плоскость [2, §4], а при $\varepsilon=-1$ высекается $\check{B}$ -плоскость ($\check{B}$ -плоскость - $H\Lambda$ -виртуальная нормаль, определенная объектом $\check{B}^s_u$ [4, §2]).

Т е о р е м а 1. H-распределение несет однопараметрическое семейство инвариантных НКН $(\chi(\varepsilon),\Lambda)$, внутренним образом связанных с H-распределением в дифференциальной окрестности первого порядка, базовыми распределениями которых являются распределения плоскостей $\chi(\varepsilon)$ и Λ ($\chi(\varepsilon)$-плоскости пучка $(\chi(\varepsilon),\check{B})$, соответствующие пучку квазитензоров $\chi^p_u(\varepsilon)$ (4)). В случае, если $H(\Lambda)$-распределение взаимно ($\Lambda^n_{pu}\equiv 0$), пучок $(\chi(\varepsilon),\Lambda)$ НКН H-распределения вырождается в НКН (χ,Λ).

Проводя аналогичное рассуждение и учитывая результаты работ [4, §2]; [5; §1], [6], приходим к следующим предложениям:

Т е о р е м а 2. В дифференциальной окрестности порядка $t\geqslant 2$ к H-распределению внутренним инвариантным образом присоединяются (при $\Lambda^n_{pu}\not\equiv 0$) пять полей однопараметрических семейств НКН, соответствующих полям однопараметрических пучков $(\mathcal{F},\chi)$, $(\mathcal{F},\check{B})$, $(\mathcal{F},\mathcal{H})$, $(\mathcal{H},\chi)$, $(\mathcal{H},\check{B})$ $H\Lambda$-виртуальных нормалей первого рода [4, §2]. Если $\mathcal{H}(\Lambda)$-распределение взаимно [7, §1]; [3, §1] ($\Lambda^n_{pu}\equiv 0$), то к H-распределению в той же дифференциальной окрестности порядка $t\geqslant 2$ внутренним инвариантным образом присоединяются три поля однопараметрических семейств НКН, соответствующих полям однопараметрических пучков $(\mathcal{F},\chi)$, $(\mathcal{F},\mathcal{H})$, $(\mathcal{H},\chi)$ $H\Lambda$-виртуальных нормалей первого рода.

Т е о р е м а 3. В дифференциальной окрестности порядка $(n-\tau-1)+t$ с каждой парой $(\nu,\mathfrak{A}_\nu)$, $(\nu,\mathfrak{H}_\nu)$, $(\nu\,\mathfrak{L}_\nu)$ [4, §1] ассоциируются и внутренним инвариантным образом определяются на H-распределении данного $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения три однопараметрических семейства НКН вида $(\overset{*}{\mathcal{L}}_{n-\tau-1}(\varepsilon),\Lambda)$, базовыми распределениями которых (при каждом фиксированном ε) являются $\mathcal{L}^*_{n-\tau-1}(\varepsilon)$ -распределение [5, §1] и Λ-распределение.

б) Оснащающее M-распределение и распределение HM-виртуальных нормалей $\Phi(L_0)$ первого рода [2, §4] определяют НКН (M,Φ) на H-распределении, структурный объект (аффинор) $\{\Phi^\tau_\sigma\}$ которой в репере $\mathcal{R}_L(H,M)$ [2, §3] представим в виде

$$\Phi^\tau_\sigma=\delta^\tau_\sigma-2\mathfrak{D}^\tau_a\overset{*}{\mathfrak{D}}{}^a_\sigma=-\delta^\tau_\sigma+2\mathfrak{D}^\tau_\alpha\overset{*}{\mathfrak{D}}{}^\alpha_\sigma, \qquad (6)$$

где

$$\|\mathfrak{D}^\tau_\sigma\|=\begin{Vmatrix}\delta^b_a & 0\\ \varphi^b_\alpha & \delta^\beta_\alpha\end{Vmatrix},\quad \|\overset{*}{\mathfrak{D}}{}^\tau_\sigma\|=\begin{Vmatrix}\delta^c_b & 0\\ -\varphi^c_\beta & \delta^\gamma_\beta\end{Vmatrix}. \qquad (7)$$

В силу формул (6) и (7) компоненты аффинора $\{\Phi^\tau_\sigma\}$ имеют следующее строение:

$$\Phi^b_a=-\delta^b_a\ ;\ \Phi^\beta_a=0;\ \Phi^\alpha_\beta=\delta^\alpha_\beta\ ;\ \Phi^a_\beta=2\varphi^a_\beta. \qquad (8)$$

Аналогичным образом устанавливаем, что НКН (M,F) на H-распределении, базовыми распределениями которой являются распределения M-плоскостей [2, §1] и $\mathcal{F}$ -плоскостей [4, §2], задается аффинором $\{\hat{F}^\tau_\sigma\}$:

$$\hat{F}^\tau_\sigma=\delta^\tau_\sigma-2\mathfrak{Z}^\tau_a\overset{*}{\mathfrak{Z}}{}^a_\sigma=-\delta^\tau_\sigma+2\mathfrak{Z}^\tau_\alpha\overset{*}{\mathfrak{Z}}{}^\alpha_\sigma, \qquad (9)$$

$$\| \mathfrak{Z}^{\tau}_{\sigma} \| = \begin{Vmatrix} \delta^{b}_{a} & 0 \\ F^{b}_{\alpha} & \delta^{\beta}_{\alpha} \end{Vmatrix}, \quad \| \overset{*}{\mathfrak{Z}}{}^{\tau}_{\sigma} \| = \begin{Vmatrix} \delta^{c}_{b} & 0 \\ -\dot{F}^{c}_{\beta} & \delta^{\gamma}_{\beta} \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

Используя (9) и (10), найдём охваты компонент аффинора $\{\hat{F}^{\tau}_{\sigma}\}$:

$$\hat{F}^{b}_{a} = -\delta^{b}_{a}; \quad \hat{F}^{\beta}_{a} = 0, \quad \hat{F}^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}; \quad \hat{F}^{a}_{\beta} = 2F^{a}_{\beta}. \tag{11}$$

Т е о р е м а 4. В дифференциальной окрестности первого порядка к H-распределению внутренним инвариантным образом присоединяется однопараметрическое семейство НКН $(\Phi(\varepsilon), M)$, определенных полем однопараметрического пучка аффиноров

$$\Phi^{\tau}_{\sigma}(\varepsilon) = \Phi^{\tau}_{\sigma} + \varepsilon(\Phi^{\tau}_{\sigma} - F^{\tau}_{\sigma}). \tag{12}$$

В силу результатов работы [4, §3], аналогичным образом приходим к выводу:

Т е о р е м а 5. В дифференциальной окрестности порядка $t \geqslant 2$ к H-распределению внутренним инвариантным образом присоединяются поля однопараметрических семейств НКН $(\tilde{\mathcal{Z}}(\varepsilon), M)$, $(\hat{\mathcal{Z}}(\varepsilon), M)$, определенных соответственно пучками аффиноров:

$$\tilde{\mathcal{Z}}^{\tau}_{\sigma}(\varepsilon) = \mathcal{Z}^{\tau}_{\sigma} + \varepsilon(\mathcal{Z}^{\tau}_{\sigma} - \Phi^{\tau}_{\sigma}), \tag{13}$$

$$\hat{\mathcal{Z}}^{\tau}_{\sigma}(\varepsilon) = \mathcal{Z}^{\tau}_{\sigma} + \eta(\mathcal{Z}^{\tau}_{\sigma} - F^{\tau}_{\sigma}). \tag{14}$$

2. Неголономные композиции А.П.Нордена в оснащающем M-распределении

а) Базисное Λ-распределение данного $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения и распределение $M\Lambda$-виртуальных нормалей L ([2], §4) определяют НКН (L, Λ), структурный объект $\{\eta^{b}_{a}\}$ которой можно задать формулами

$$\eta^{b}_{a} \overset{def}{=} \delta^{b}_{a} - 2h^{b}_{p}\overset{*}{h}{}^{p}_{a} = -\delta^{b}_{a} + 2h^{b}_{i}\overset{*}{h}{}^{i}_{a}, \tag{15}$$

где взаимно обратные матрицы $\| h^{b}_{a} \|$ и $\| \overset{*}{h}{}^{b}_{a} \|$ относительно репера $\mathcal{R}_{L}(H, X)$ имеют следующее строение:

$$\| h^{b}_{a} \| = \begin{Vmatrix} \delta^{p}_{q} & \Lambda^{i}_{q} \\ 0 & \delta^{i}_{j} \end{Vmatrix}; \quad \| \overset{*}{h}{}^{b}_{a} \| = \begin{Vmatrix} \delta^{s}_{p} & -\Lambda^{j}_{p} \\ 0 & \delta^{j}_{i} \end{Vmatrix}. \tag{16}$$

Формулы охвата компонент аффинора $\{\eta^{b}_{a}\}$ в репере $\mathcal{R}_{L}(H, X)$ принимают вид:

$$\eta^{q}_{p} = -\delta^{q}_{p}, \quad \eta^{i}_{p} = -2\Lambda^{i}_{p}, \quad \eta^{p}_{i} = 0, \quad \eta^{j}_{i} = \delta^{j}_{i}. \tag{17}$$

Т е о р е м а 6. Инвариантная НКН оснащающего M-распределения, определенная полем аффинора (17), внутренним образом присоединяется в дифференциальной окрестности первого порядка и геометрически характеризуется тем, что ассоциированное $M(\Lambda)$-распределение является взаимным.

б) Пучок $(X, \check{B})$ $H\Lambda$-виртуальных нормалей [4, §2] в дифференциальной окрестности первого порядка порождает пучок $(L, \check{\mathcal{B}})$ $M\Lambda$-виртуальных нормалей первого рода.

Т е о р е м а 7. В дифференциальной окрестности первого порядка оснащающее M-распределение данного $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения несет однопараметрическое семейство НКН $(\check{\mathcal{B}}(\varepsilon), \Lambda)$, определяемое внутренним образом однопараметрическим семейством аффиноров $\check{\mathcal{B}}^{a}_{b}(\varepsilon)$:

$$\check{\mathcal{B}}^{a}_{b}(\varepsilon) = \begin{Vmatrix} -\delta^{t}_{p} & 0 \\ 2\check{\mathcal{B}}^{t}_{j}(\varepsilon) & \delta^{k}_{j} \end{Vmatrix}, \tag{18}$$

где

$$\check{\mathcal{B}}^{a}_{b} = \delta^{a}_{b} - 2\check{b}^{a}_{p}\overset{*}{\check{b}}{}^{p}_{b} = -\delta^{a}_{b} + 2\check{b}^{a}_{i}\overset{*}{\check{b}}{}^{i}_{b}, \tag{19}$$

$$\check{\mathcal{B}}^{t}_{j}(\varepsilon) = X^{t}_{j} + \varepsilon(X^{t}_{j} - \check{B}^{t}_{j}), \tag{20}$$

$$\| \check{b}^{b}_{a} \| = \begin{Vmatrix} \delta^{p}_{q} & 0 \\ \check{\mathcal{B}}^{p}_{j} & \delta^{i}_{j} \end{Vmatrix}, \quad \| \overset{*}{\check{b}}{}^{a}_{b} \| = \begin{Vmatrix} \delta^{q}_{p} & 0 \\ -\check{\mathcal{L}}^{q}_{j} & \delta^{i}_{j} \end{Vmatrix}. \tag{21}$$

в) В дифференциальной окрестности порядка $t \geqslant 2$ пять полей однопараметрических семейств $(X, \mathfrak{F})$, $(\mathfrak{F}, \mathcal{H})$, $(X, \mathcal{H})$, $(\mathfrak{F}, \check{B})$, $(\mathcal{H}, \check{B})$ $H\Lambda$-виртуальных нормалей порождают соответственно пять полей однопараметрических семейств $(L, \mathfrak{F})$, $(\mathfrak{F}, \mathcal{G})$, $(L, \mathcal{G})$, $(\mathfrak{F}, \check{\mathcal{B}})$, $(\mathcal{G}, \check{\mathcal{B}})$ $M\Lambda$-виртуальных нормалей [4, §3]. В случае взаимного $\mathcal{H}(\Lambda)$-распределения имеем три поля однопараметрических семейств $H\Lambda$-виртуальных нормалей $(X, \mathfrak{F})$, $(X, \mathcal{H})$, $(\mathfrak{F}, \mathcal{H})$ и, следовательно, три поля им соответствующих однопараметрических семейств $\mathcal{M}\Lambda$-виртуальных нормалей $(\mathcal{L},\mathcal{F})$, $(\mathcal{L},\mathcal{Y})$, $(\mathcal{F},\mathcal{Y})$.

Т е о р е м а 8. В дифференциальной окрестности порядка $t \geq 2$ на $\mathcal{M}$-распределении внутренним инвариантным образом определяются пять полей однопараметрических пучков НКН $(\mathcal{F}(\varepsilon),\Lambda)$, $(\mathcal{Y}(\varepsilon),\Lambda)$, $(\mathcal{H}_L(\varepsilon),\Lambda)$, $(\check{\mathcal{L}}(\varepsilon),\Lambda)$, $(\mathcal{B}(\varepsilon),\Lambda)$, а в случае взаимного $\mathcal{H}(\Lambda)$-распределения (при $\Lambda^n_{pu} \equiv 0$)- три поля однопараметрических пучков НКН $(\Lambda,\mathcal{F}(\varepsilon))$, $(\Lambda,\mathcal{Y}(\varepsilon))$, $(\Lambda,\mathcal{H}_L(\varepsilon))$.

г) Однопараметрический пучок $(\check{\mathcal{Z}}(\eta),\mathcal{X})$ ([5], §2) $\mathcal{H}\Lambda$-виртуальных нормалей первого рода, внутренним инвариантным образом построенный в дифференциальной окрестности порядка $(n-z+1)$ и ассоциированный с парой $(\mathcal{V}, \mathcal{L}(L_0))$, порождает в этой же окрестности однопараметрический пучок $(\check{f}(\eta),\mathcal{L})$ $\mathcal{M}\Lambda$-виртуальных нормалей первого рода.

Т е о р е м а 9. В дифференциальной окрестности порядка $(n-z+1)$ внутренним инвариантным образом присоединяется к $\mathcal{M}$-распределению однопараметрическое семейство НКН $(\check{f}(\eta),\Lambda)$, определяемое внутренним образом однопараметрическим семейством аффиноров

$$\check{f}^a_b(\eta) = \begin{Vmatrix} -\delta^t_p & 0 \\ 2\check{\mathcal{Z}}^t_j(\eta) & \delta^k_j \end{Vmatrix}, \tag{22}$$

где

$$\check{f}^a_b = \delta^a_b - 2\check{\mathcal{Z}}^a_p \check{\mathcal{Z}}^p_b = -\delta^a_b + 2\check{\mathcal{Z}}^a_i \check{\mathcal{Z}}^{*i}_b, \tag{23}$$

$$\check{\mathcal{Z}}^t_j(\eta) = \chi^t_j + \eta\,(\chi^t_j - \check{\mathcal{Z}}^t_j), \tag{24}$$

$$\|\check{\mathcal{Z}}^b_a\| = \begin{Vmatrix} \delta^p_q & 0 \\ \check{\mathcal{Z}}^p_j & \delta^i_j \end{Vmatrix}, \quad \|\check{\mathcal{Z}}^{*a}_b\| = \begin{Vmatrix} \delta^q_p & 0 \\ -\mathcal{Z}^q_j & \delta^i_j \end{Vmatrix}. \tag{25}$$

Учитывая результаты работ [5, §1],[6], получаем более общее предложение:

Т е о р е м а 10. На оснащающем $\mathcal{M}$-распределении с каждой парой $(\mathcal{V}, \mathcal{Q})$, $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, $(\mathcal{V}, \mathcal{L})$ ассоциируется три двупараметрических пучка НКН вида $(\check{f}(\eta),\Lambda)$, внутренним инвариантным образом присоединенных в дифференциальной окрестности порядка $(n-z-1)+t$, где t -порядок внутренней инвариантной нормали $\mathcal{V}$ первого рода оснащающего $\mathcal{H}$-распределения.

Библиографический список

1. Д о м б р о в с к и й Р.Ф. О неголономных композициях на поверхностях $M_{m,z}$ в P_n // Тез.докл.Всесоюзн. конф. по неевклидовой геометрии "150 лет геометрии Лобачевского"- Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1976. С.69.

2. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. I / П о п о в Ю.И.; Калинингр.ун-т.-Калининград, 1984, -93с.- Библиогр.21 назв.-Рус.-Деп в ВИНИТИ 2.07.84, № 4481-В.

3. Трехсоставные регулярные распределения $\mathcal{H}^z_{m,n-1}$ проективного пространства / П о п о в Ю.И.; Калинингр. ун-т, Калининград, 1982, -126с.-Библиогр.20 назв.-Рус.-Деп. в ВИНИТИ 16.12.82, № 6192-В.

4. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. II / П о п о в Ю.И.; Калинингр.ун-т.-Калининград, 1984.-36с.- Библиогр.8 назв.-Рус.-Деп.в ВИНИТИ 9.01.85, № 252-В.

5. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. III. / П о п о в Ю.И.; Калинингр.ун-т.-Калининград, 1984.-37с.- Библиогр.6 назв.-Рус.-Деп.в ВИНИТИ 19.02.85, № 1275-В.

6. П о п о в Ю.И. Об одномерных нормалях первого рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения. // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат.сб.научн.тр. / Калинингр.ун-т. Калининград, 1985. Вып.16. С.57-66.

7. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР.-М., 1975. Т.7. С.117-151.